Ogólna teoria całki
Lista 6

Zad 1. Niech G będzie przestrzenią metryczną, a X przestrzenią z miara μ. Rozważmy odwzorowanie $f : G \times X \longmapsto \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \in X$ funkcja $x \mapsto f(t,x)$ jest mierzalna. Pokazać, że warunki

1) dla prawie każdego $x \in X$ funkcja $t \mapsto f(t,x)$ jest ciągła,

2) istnieje funkcja $h : X \to \mathbb{R}$ taka, że $\int_X h(x)\,d\mu(x) < +\infty$ oraz dla prawie każdego $x \in X$ i każdego $t \in G$ mamy $|f(t,x)| \leq h(x)$,

implikują, iż funkcja

$$g(t) := \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$$

jest poprawnie określona oraz ciągła.

Zad 2. Sprawdzić, czy funkcja g jest ciągła na $(-1,1)$, gdy

$$a)\quad g(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + |t|}, \qquad b)\quad g(t) = \int_0^1 \frac{2xt^2}{x^2 + t^2 x + 1}\,dx, \qquad c)\quad g(t) = \int_0^1 \frac{2xt^2}{x^2 + t^2}\,dx.$$

Zad 3. Niech $G = (a,b)$ będzie odcinkiem, a X przestrzenią z miara μ. Rozważmy odwzorowanie $f : G \times X \longmapsto \mathbb{R}$. Pokazać, że warunki

1) dla prawie każdego $x \in X$ funkcja $t \mapsto f(t,x)$ jest klasy C^1 oraz dla każdego $t \in G$ funkcja $x \mapsto \partial_t f(t,x)$ jest mierzalna,

2) istnieje funkcja $h : X \to \mathbb{R}$ taka, że $\int_X h(x)\,d\mu(x) < +\infty$ oraz dla prawie każdego $x \in X$ i każdego $t \in G$ mamy $|\partial_t f(t,x)| \leq h(x)$,

implikują, iż odwzorowanie

$$g(t) := \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$$

jest poprawnie określoną funkcją klasy C^1. Ile wynosi $g'(t)$?

Zad 4. Sprawdzić, czy funkcja g jest klasy C^1 na $\mathbb{R}$, gdy

$$a)\quad g(t) = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \ln(x^2 + t^2)\,dx, \qquad b)\quad g(t) = \int_0^1 \ln(x^2 + t^2)\,dx.$$

Definicja. Niech X będzie przestrzenią z miarą μ. Dla $p \in (0,\infty)$ kładziemy

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

a elementy rodziny $\mathcal{L}^p_\mu(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \|f\|_p < +\infty\}$ nazywamy *funkcjami całkowalnymi w p-tej potędze.* Dla $p = \infty$ kładziemy

$$\|f\|_\infty = \inf\{K > 0 : |x(t)| \leq K \text{ dla prawie wszystkich } t \in X\},$$

co nazywamy *supremum istotnym* funkcji x, a elementy rodziny $\mathcal{L}^\infty_\mu(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < +\infty\}$ nazywamy *funkcjami istotnie ograniczonymi.*

Zad 5. Pokazać, że dla każdego $p \in (0,\infty]$ zbiór $\mathcal{L}^p_\mu(X)$ wraz z naturalnymi działaniami punktowymi stanowi przestrzeń liniową.